Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Тюменской области
«Тюменский колледж производственных и социальных технологий»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

к изучению раздела «Элементы линейной алгебры»

дисциплины ЕН. 01 Элементы высшей математики

г. Тюмень, 2019 год

Исказиева А. М., Щедрина Е. Г., Вохменина Е. Ф.

Элементы линейной алгебры. Учебно-методическое пособие к изучению раздела «Элементы линейной алгебры» дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики. – Тюмень: Тюменский колледж производственных и социальных технологий, 2019г. – 79с.

СОДЕРЖАНИЕ

Теоретические основы

1.1. Матрицы 4

1.1.1. Определение матрицы 4

1.1.2. Виды матриц 5

1.1.3. Равенство матриц 6

1.1.4. Сложение матриц 6

1.1.5. Умножение матриц на число 6

1.1.6. Умножение матриц 6

1.2. Определители 8

1.2.1. Определители второго порядка и их свойства 8

1.2.2. Определители третьего порядка 9

1.3. Обратная матрица 13

1.4. Ранг матрицы 14

1.5. Системы линейных уравнений 15

1.5.1. Основные понятия 15

1.5.2. Формулы Крамера. Матричный способ решения систем линейных уравнений 16

1.5.3. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса 20

2. Методические указания для студентов

2.1. Алгебраические операции над матрицами 22

2.2. Вычисление определителей второго, третьего порядка 23

2.3. Обратная матрица. Ранг матрицы 24

2.4. Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера и матричным способом 26

2.5. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса (методом исключения неизвестных) 28

3. Использование информационных технологий (MS Excel, MathCad, Pascal)

3.1. Решение задач линейной алгебры в программе MS Excel 31

3.2. Решение задач линейной алгебры в среде MathCad 34

3.3. Решение систем линейных уравнений в программе Pascal 37

4. Материалы для самостоятельной работы студентов

4.1. Контрольные вопросы 39

4.2. Задачи и упражнения для самостоятельной работы 40

4.3. Комплект заданий в тестовой оболочке «MyTestStudent» 44

4.4. Расчетные задания 57

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

1.1 МАТРИЦЫ

1.1.1 Определение матрицы

Алгебра – одна из составных частей современной математики. Название алгебра происходит от названии книги арабского математика Мухаммеда аль Хорезми «Ал-д жабр…»

Основной задачей алгебры было решение алгебраических уравнений, а так же систем уравнений и как особо важный случай, систем линейных уравнений. Для решения последних были введены понятия матрицы и определители, которые в последствии стали самостоятельными объектами изучения. Указанный материал впоследствии стал относиться к высшей алгебре.

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов.

Для обозначения матрицы применяются круглые скобки и прописные буквы A,B,C...

Например, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ есть общий вид записи матрицы из m×n чисел.

Числа a_{11}, a_{12} ,…, a_{mn} , составляющие матрицу, называются ее элементами.

Горизонтальные ряды матрицы называются ***строками*** матрицы, вертикальные - ***столбцами***.

Индексы i и j у элемента a_{ij} , где i =1,2,...m; j =1,2,...,n, означают, что этот элемент расположен в i-й строке и j-м столбце.

Например, элемент a_{23} расположен во второй строке, в третьем столбце.

Числа m и n , указывающие количество строк и столбцов матрицы, называются ***размерами матрицы*** и пишут $A^{m\times n}$.

Например, $C^{2\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{4} & 4 \\ \sqrt{2} & -4.12 & 0 \end{pmatrix}$, где элементами матрицы являются:

$c_{21} = \sqrt{2},\ c_{23} = 0,\ c_{12} = -\frac{3}{4}$

Матрица обозначается также в сокращенной форме A = (a_{ij}), где i=1, 2, 3,…,m j=1,2,3,…,n.

1.1.2 Виды матриц

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной***. Квадратную матрицу размера $n\times n$ называют ***матрицей n-го порядка***.

Например, $B = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} - кв.матрица\ 3-го\ порядка$

Квадратная матрица n-го порядка записывается так $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Элементы, стоящие на диагонали, идущей из левого верхнего угла $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$, образуют ***главную диагональ***, а элементы, стоящие на диагонали, идущей из правого верхнего угла $(a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{n1})$, образуют ***побочную диагональ***.

Например, в квадратной матрице 3-го порядка $B=\begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Главная диагональ образуют числа - (-4, 1, -1), а побочная диагональ - (1, 1, -5)

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

Например, матрица $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ - есть диагональная матрица 2-го порядка, $K=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}56 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица 3-го порядка.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной***. Единичную матрицу обозначают прописной буквой Е.

Например, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ единичная матрица 2-го порядка.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Нулевую матрицу обозначают прописной буквой О.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется ***вектором*** (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно).

Например, $C=\begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}$ - вектор-строка, $D=\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ - вектор-столбец.

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Например, матрица $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 7 & 2{,}5 \end{pmatrix}$ - есть треугольная матрица 3-го порядка, $Z=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ - треугольная матрица 2-го порядка.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей ***транспонированной*** к данной. Обозначается A^T.

Например, для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 8 \\ -8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ транспонированной является $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ -3 & 0 & 7 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $\left(A^T\right)^T = A$

1.1.3 Равенство матриц

Две матрицы A и B называются равными (A=B), если они имеют одинаковые размеры и равные соответствующие элементы.

Например, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ и A=B, то $b_{11}=2, b_{12}=0, b_{21}=3, b_{22}=-1$.

1.1.4 Сложение матриц

Суммой двух матриц A = $\left(a_{ij}\right)$ и B = $\left(b_{ij}\right)$ называется матрица C = $\left(c_{ij}\right)$ элементы, которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B, т.е $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, где i=1,2,3,…,m, j=1,2,3,…,n.

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров.

Например, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Аналогично определяется разность матриц.

Нетрудно проверить, что сумма матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам, т.е. A + B = B + A и (A + B)+ C = A + (B + C).

1.1.5 Умножение матриц на число

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Произведением матрицы A на число k называется матрица kA, каждый элемент которой равен ka_{ij}.

Например, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и k=2, то 2A=$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Матрица –A =(-1)·A называется ***противоположной*** матрице A.

Умножение матрицы на число подчиняется закону λ(μA)=(λμ)A , где λ и μ − числа.

1.1.6 Умножение матриц

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы A размеров m×n на матрицу B размеров n×p называется матрица C = A·B размеров m×p ,элементы c_{ij} которой определяются по формуле
$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+...+a_{1n}\cdot b_{nk}$, где $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,p$.

Чтобы получить элементы произведения матриц, нужно каждую строку первой матрицы умножить на соответствующие элементы каждого столбца второй матрицы и полученные произведения сложить.

Если матрицы А и В произвольного размера, то произведения АВ и ВА не всегда существуют. Если матрицы А и В квадратные одного размера, то произведения АВ и ВА всегда существуют.

Рассмотрим умножение квадратных матриц второго порядка. Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *и* $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. ***Произведением*** этих матриц называется матрица

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

<u>чтобы найти элемент</u> c_{11} первой строки и первого столбца матрицы С, нужно каждый элемент первой строки матрицы А (т.е. a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы В (т.е. b_{11} и b_{21}) и полученные произведения сложить: $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$;

<u>чтобы получить элемент</u> c_{12} первой строки и второго столбца матрицы С, нужно умножить все элементы первой строки (a_{11} и a_{12}) на соответствующие элементы второго столбца (т.е. b_{12} и b_{22}) и полученные произведения сложить: $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$;

аналогично находится элементы c_{21} и c_{22}.

Пример 1. Пусть даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица А имеет два столбца, В - две строки; следовательно, АВ определено. $AB=\begin{pmatrix} 1\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot1+3\cdot0 \\ 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Пусть даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица А имеет два столбца, В - две строки; следовательно, АВ определено.

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3\cdot2+2\cdot4 & 3\cdot1+2\cdot0 & 3\cdot3+2\cdot1 \\ 4\cdot2+1\cdot4 & 4\cdot1+1\cdot0 & 4\cdot3+1\cdot1 \\ 1\cdot2+0\cdot4 & 1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot3+0\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 3 & 11 \\ 12 & 4 & 13 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример 3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица А имеет два столбца, В - две строки; следовательно, АВ определено.

$$A\cdot E=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot0+2\cdot1\\ 3\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot0+4\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=A \quad \text{и}$$

$$E\cdot A=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot3 & 1\cdot2+0\cdot4\\ 0\cdot1+1\cdot3 & 0\cdot2+1\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=A.$$

Итак, если E единичная матрица и A - квадратная, то A·E=E·A=A, т.е. единичная матрица играет роль единицы в действиях над матрицами.

Пример 4. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

Решение. Очевидно, что определены произведения A·B и B·A

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}(-1)\cdot0+2\cdot2 & (-1)\cdot1+2\cdot3\\ 3\cdot0+4\cdot2 & 3\cdot1+4\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 8 & 15\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0\cdot(-1)+1\cdot3 & 0\cdot2+1\cdot4\\ 2\cdot(-1)+3\cdot3 & 2\cdot2+3\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 7 & 16\end{pmatrix}$$

Этот пример показывает, что произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону, т.е. A·B≠B·A. Однако можно проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному и распределительному законам, т.е. A(BC)=(AB)C и (A+B)C=AC+BC.

1.2 Определители

1.2.1 Определители второго порядка и их свойства

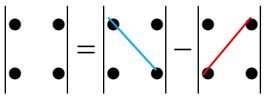
Определитель – это число, которое по специальным правилам вычисляется для каждой квадратной матрицы. Пусть дана квадратная матрица второго порядка $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагонали: $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Для обозначения определителя используются вертикальные черточки и прописная буква Δ.

Например, $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ - есть общий вид определителя 2-го порядка.

Например, Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:



Пример 1. $\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & 6\end{vmatrix}$=2·6-(-3)·5=27.

Пример 2. $\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$

Рассмотрим простейшие свойства определителя второго порядка.

Свойство 1.2.1 Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами. Из свойства 1.2.1 следует, что свойства, установленные для строк определителя, справедливы и для его столбцов.

Свойство 1.2.2 При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет свой знак на противоположный: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$

Свойство 1.2.3 Определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$

Свойство 1.2.4 Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число: $\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Свойство 1.2.4 означает, что общий множитель всех элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Свойство 1.2.5 Определитель, у которого элементы двух его строк (столбцов) пропорциональны, равен нулю.

Свойство 1.2.6 Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у одного из них элементами соответствующей строки являются первые слагаемые, у другого - вторые. Оставшиеся элементы этих определителей те же, что и у данного:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b \\ a_{21} & a_{22} + c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b \\ a_{21} & c \end{vmatrix}$$

Свойство 1.2.7 Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число: $\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Свойство 1.2.8 Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали, - нули, равен произведению элементов главной диагонали: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12$

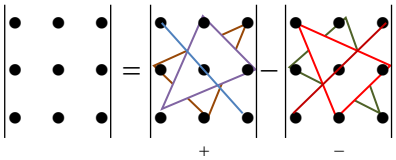
1.2.2 Определители третьего порядка

Пусть дана квадратная матрица 3-го порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Определитель 3-го порядка называется число равное

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части берутся со знаком «+», а какие со знаком «-», полезно использовать следующее *правило треугольников* (*правилом Саррюса*), которое символически можно записать так:



Так, согласно правилу треугольников необходимо:

1) вычислить с собственными знаками произведения элементов, лежащих на главной диагонали и в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны этой диагонали;

2) найти произведения элементов, лежащих на побочной диагонали и в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали, и взять их с противоположными знаками;

3) найти общую сумму всех произведений.

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Решение. $\Delta = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 - 1 \cdot 1 \cdot 6 - 5 \cdot (-4) \cdot 0 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) = -15 + 0 + 48 - 6 - 0 - 18 = 9$

Для упрощения вычисления можно использовать следующий способ:

Элементы главной диагонали со знаком +, элементы главной диагонали со знаком -.

Пример 2. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{matrix} = -15 + 0 + 48 - 6 - 0 - 18 = 9$

Все свойства определителей второго порядка справедливы и для определителей третьего порядка. Доказательства этих свойств основаны на вычислении определителя третьего порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij}, где i,j=1, 2, 3 определителя третьего порядка, называется определитель второго порядка, полученный из данного вычеркиванием i–й строки и j–го столбца.

Пример 3. Для определителя 3-го порядка $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ -7 & 5 & -3 \end{vmatrix}$, минорами являются

$M_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$ элемента a_{11};

$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$ элемента a_{23};

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$ элемента a_{31};

$M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$ элемента a_{33}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij}, где i,j=1, 2, 3, называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Знаки алгебраического дополнения A_{ij}: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Пример 4. Найти алгебраические дополнения элементов a_{13}, a_{32}, a_{12} определителя

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ -7 & 5 & -3 \end{vmatrix}.$$

<u>Решение</u>.

$$A_{13} = (-1)^4 M_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 - 9 \cdot (-7) = 0 + 63 = 63$$

$$A_{32} = (-1)^5 M_{32} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -((-1) \cdot 6 - 3 \cdot 0) = -(-6 - 0) = 6$$

$$A_{12} = (-1)^3 M_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -(0 \cdot (-3) - 6 \cdot (-7)) = -(0 + 42) = -42.$$

Теорема 1.1 Разложение определителя по элементам строки или (столбца)

Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения. Иными словами, имеют место шесть равенств:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \ldots$$
$$\ldots = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т.к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

Пример 5. Определитель $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ -7 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ разложить:

1. по элементам второй строки;
2. по элементам первого столбца.

Решение.

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 9 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} =$$

1. $$= 0 + 9 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 9((-1) \cdot (-3) - 3 \cdot (-7)) - 6((-1) \cdot 5 - 2 \cdot (-7)) =$$

$$= 9(3 + 21) - 6(-5 + 14) = 9 \cdot 24 - 6 \cdot 9 = 216 - 54 = 162$$

$$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = (-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-7)\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} =$$

2. $$= (-1)\cdot\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 0 + (-7)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(9\cdot(-3) - 6\cdot 5) + (-7)(2\cdot 6 - 3\cdot 9) =$$

$$= -(-27-30) - 7(12-27) = -(-57) - 7\cdot(-15) = 57 + 105 = 162$$

Пример 6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Разложим определитель по элементам третьей строки.

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33} =$$

$$= 2M_{31} + 0M_{32} + 0M_{33} = 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-4-5) = -18.$$

Если определитель имеет четвертый или более высокий порядок, то его также можно разложить по элементам строки или столбца.

Пример 7. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Разложим определитель по элементам 1-го столбца.

$$\Delta = 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(7\cdot 3\cdot 4 + 5\cdot 7\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot(-1) - 1\cdot 3\cdot(-1) - 2\cdot 7\cdot 7 - 5\cdot 0\cdot 4) + (5\cdot 3\cdot 4 + 5\cdot 7\cdot 8 + 7\cdot 2\cdot(-1) - 8\cdot 3\cdot(-1)$$

$$- 2\cdot 5\cdot 7 - 5\cdot 7\cdot 4) - (5\cdot 0\cdot 2 + 7\cdot 3\cdot 8 + 7\cdot 1\cdot 5 - 8\cdot 0\cdot 5 - 5\cdot 1\cdot 3 - 7\cdot 7\cdot 2) =$$

$$= 3(84 + 35 + 0 + 3 - 98 - 0) - (60 + 280 - 14 + 24 - 70 - 140) + (0 + 168 + 35 - 0 - 15 - 98) =$$

$$= 3\cdot 24 + 140 - 90 = 72 + 140 - 90 = 122$$

Перечислим различные способы вычисления определителей.

1. Определитель можно вычислить, используя непосредственно его определение. Этим способом удобно находить определители 2-го и 3-го порядков (треугольник Саррюса), а для определителя более высокого порядка применим следующий способ:
   a. Определитель можно вычислить с помощью его разложения по элементам строки или столбца.
   b. Определитель можно вычислить способом приведения к треугольному виду. Этот способ основан на том, что в силу свойства 1.2.8 треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Чтобы получить треугольный определитель, нужно используя свойство 1.2.7, к какой-либо строке (или столбцу) заданного определителя прибавлять соответствующие элементы

другой стоки (или столбца), умноженные на одно и тоже число, до тех пор пока не придем к определителю треугольного вида.

1.3 ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Пусть дана квадратная матрица A порядка n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица A^{-1} порядка n называется **обратной** матрицей для данной матрицы A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где $-$ E единичная матрица.

Обозначим через Δ определитель матрицы A и вычислим его. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то матрицу A называют **неособенной** (**невырожденной**) матрицей, если же $\Delta=0$, то **особенной** (**вырожденной**) матрицей.

Теорема 1.3. Всякая неособенная матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, определяемую формулой: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где A_{11}, A_{12}, …, A_{nn} есть алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A.

Свойства обратной матрицы.

1. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Нахождение обратной матрицы имеет большое значения при решении систем линейных уравнений и в вычислительных методах линейного программирования.

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Вычисляют определитель данной матрицы.
2. Вычисляют алгебраические дополнения всех элементов данной матрицы и записывают новую матрицу.
3. Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонируют матрицу).
4. Умножают полученную матрицу на выражение $\frac{1}{\Delta}$, Записывают обратную матрицу.

Пример 1. Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти обратную A^{-1}.

Решение.

1. $\Delta = 4 - 6 = -2$.

2. $A_{11}=4$; $A_{12}= -3$; $A_{21}= -2$; $A_{22}=1$, получим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

1.4 РАНГ МАТРИЦЫ

Рассмотрим матрицу $A^{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Выделим в ней k строк и k столбцов

($k \le \min(m;n)$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются **минорами этой матрицы**. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется **рангом матрицы.** Обозначается r, r(A), rangA.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется ***базисным***. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Пример 1. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$. Определить ее ранг.

Решение. Имеем $M_1 = |1| \ne 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \ne 0$, $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ne 0$. Минор 4-го порядка составить нельзя.

Ответ: rangA=3.

Матрицы, имеющие одинаковый ранг, называются **эквивалентными**. Эквивалентность матриц обозначается знаком ~ между ними. Записывается A~B. Надо отметить, что **равные** матрицы и **эквивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

Отметим свойства ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

Простейший способ определения ранга матрицы состоит в приведении ее к ступенчатому виду при помощи последовательности элементарных преобразований.

К ним относятся:

- ✓ Переставлять местами между собой строки (столбцы);
- ✓ Умножение строки на произвольное число, отличное от нуля;
- ✓ Прибавление к некоторой строке любой другой строки, умноженной на одно и тоже число;
- ✓ Вычеркивание нулевой строки.

Пример 2. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{ rangA = 2.}$$

Пример 3. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Переставим первый и второй столбец местами:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Чтобы иметь дело с меньшими числами, умножим первый столбец на $\frac{1}{2}$:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Первую строку прибавляем ко второй и третьей, умножая при этом на (-2) и на (-1) соответственно:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -15 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на $\frac{1}{3}$, получим: $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.

Умножим вторую строку на (-2) и прибавим ее к третьей строке: $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Вычеркиваем третью строку: $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$.

Отсюда видно, что ранг матрицы равен rang=2.

1.5 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.5.1 Основные понятия

Определители и матрицы широко применяются при решении систем линейных уравнений, т.е. систем, содержащих m уравнений первой степени относительно n неизвестных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

В наиболее общем виде такие системы записываются в форме

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где числа $\mathbf{a_{11}, a_{12},\ldots, a_{mn}}$, называются **коэффициентами системы** или **коэффициентами при неизвестных.** Первый индекс у коэффициентов системы указывает на номер уравнения, второй на номер неизвестного, при котором записан этот коэффициент.

Числа $\mathbf{b_1, b_2,\ldots, b_m}$ называются **свободными членами**.

Если все свободные члены равны нулю, то система называется **однородной**, если же, хотя бы одно из них отлично от нуля, то **неоднородной**.

Решением системы называется любая совокупность чисел $x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n$ - подстановка которой в систему обращает каждое уравнение этой системы в верное числовое равенство.

Решить систему - это значит указать все множество ее решений или доказать ее несовместность.

Две системы линейных уравнений называются **равносильными**, если каждое решение второй системы является решением первой и наоборот.

Доказано, что если над системой выполнить преобразования:

1) Поменять местами уравнения;
2) Умножить обе части любого уравнения системы на любое не равное нулю число;
3) Прибавить к обеим частям одного из уравнений системы соответствующие части другого уравнения, умноженные на любое действительное число, то система переходит в равносильную ей систему.

Перечисленные выше преобразования называются **элементарными преобразованиями системы.**

В результате элементарных преобразований может случиться, что в системе появится уравнение, все коэффициенты которого равны нулю. Тогда, если и свободный член этого уравнения равен нулю, то уравнение справедливо при любых $x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n$ и, следовательно, его можно отбросить. Если же свободный член не равен нулю, то этому уравнению не удовлетворяют никакие значения неизвестных, следовательно, полученная система является несовместной, а это означает, что несовместна и исходная система.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

1.5.2 Формулы Крамера. Матричный способ решения систем линейных уравнений

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Введем три матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - основная матрица из коэффициентов системы,

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - вектор-столбец из неизвестных x_j,

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ - вектор-столбец из свободных членов b_i.

Так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X, то существует произведение A·X, являющееся столбцовой матрицей тех же размеров, что и матрица B.

Тогда используя правило умножения матриц, эту систему уравнений можно записать так: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ или AX=B. Это равенство называется *простейшим матричным уравнением*.

Чтобы решить матричное уравнение, нужно:

1. Найти обратную матрицу A^{-1}.

2. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу – столбец свободных членов B, т.е. $A^{-1}B$.

3. Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x+3y+2z=9 \\ x+2y-3z=14 \\ 3x+4y+z=16 \end{cases}$ представив ее в виде матричного уравнения.

<u>Решение</u>. Перепишем систему в виде AX=B, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$

Решение матричного уравнения имеет вид $X=A^{-1}B$.

Найдем обратную матрицу $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6$

2. $A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

3. Таким образом $A^{-1} = \dfrac{-1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, откуда

$$X = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ответ x=2, y=3, z=-2

Определитель основной матрицы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ называется ***определителем системы***. Если определитель системы не равен нулю, то система называется ***невырожденной***.

Теорема Крамера. Система n уравнений с n неизвестными, где $\Delta \neq 0$, всегда имеет решение и притом единственное, которое находится по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_{x3}}{\Delta},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta_{xn}}{\Delta}$$

где Δ_{xi} (i=1, 2, …, n) – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i:

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \dots,\ \Delta_{xn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Рассмотрим случай, когда **определитель системы равен нулю.** Здесь возможны два варианта:

1. $\Delta = 0$ и каждый $\Delta_{xi} = 0$. Система имеет *бесчисленное множество решений*.

2. $\Delta = 0$ и хотя бы один из $\Delta_{xi} \neq 0$. Система *не имеет решений*.

Пример 2. Решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы Δ и определители Δ_{x1} и Δ_{x2}:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3-(-1)\cdot 1 = 6+1 = 7.\ \Delta \neq 0$$

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 0\cdot 3-(-1)\cdot 7 = 0+7 = 7$$

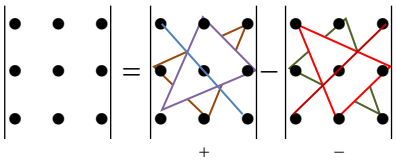
$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 7-0\cdot 1 = 14-0 = 14$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1 \quad x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2$$

Ответ: $x_1=1$, $x_2=2$

Пример 3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы Δ и определители Δx_1, Δx_2, Δx_3:



$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + (2-12) - (3-8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28-48) - (42-32) = -20 - 10 = -30; \qquad x_1 = \Delta_1/\Delta = \mathbf{1};$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28-48) - (16-56) = -100 + 40 = -60; \qquad x_2 = \Delta_2/\Delta = \mathbf{2;}$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32-42) + (16-56) = -50 - 40 = -90; \qquad x_3 = \Delta_3/\Delta = \mathbf{3.}$$

Ответ: (1, 2, 3)

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} 2x+3y=5; \\ 4x+6y=7. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0;\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 9 \neq 0;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

т.е. система решений не имеет т.к. на ноль делить нельзя

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} x - y + 2z = -2; \\ 2x - 2y + 4z = 4; \\ 3x - 3y + 6z = 3. \end{cases}$$

Решение. Нетрудно убедиться в том, что $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Данная система не имеет решений, так как первое и третье уравнения противоречивы. Если умножить первое уравнение на 3 и вычесть из полученного уравнение третье, то придем к ложному равенству 0 = 3.

1.5.3 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Матричный способ решения систем линейных уравнений, как и решение методом Крамера, применим только для особых систем линейных уравнений, в которых количество неизвестных совпадает с количеством уравнений.

Метод Гаусса применим для решения произвольных систем линейных уравнений и, следовательно, является универсальным методом. Этот метод позволяет существенно упростить и сам процесс поиска решений, если все промежуточные преобразования осуществить над специальной матрицей B составленной из коэффициентов системы и ее свободных членов: $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$,

Матрица B называется **расширенной матрицей** системы. Она позволяет заменить элементарные преобразования системы уравнений на соответствующие элементарные преобразования над своими строками, что существенно сокращает процесс поиска решении.

Процесс решения по методу Гаусса

На **1-м этапе** (прямой ход) система приводится к ступенчатому (в частности треугольному) виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

<u>При выполнении прямого хода используют следующие преобразования</u>:

1. Умножение или деление коэффициентов свободных членов на одно и то же число;

2. Сложение и вычитание уравнений;

3. Перестановку уравнений системы;

4. Исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю.

На **2-м этапе** (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из полученной ступенчатой системы.

Пример 1. Решить СЛУ методом Гаусса. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

Решение.

1-й этап: Составим расширенную матрицу системы и с помощью преобразований приводим систему к треугольному виду

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

2-й этап: Решаем полученную систему с новыми коэффициентами начиная с 3-го уравнения: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$

Ответ: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

2.1 АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Пример 1 Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -4 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Найти:

1) A+3B;
2) 2B-A^T;
3) AB.

Решение.

1) Найдем в начале $3B=\begin{pmatrix}6 & -12 & 3\\ 9 & 0 & 6\end{pmatrix}$, затем

$$A+3B=\begin{pmatrix}1+6 & 2-12 & -3+3\\ 2+9 & -4+0 & 3+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -10 & 0\\ 11 & -4 & 9\end{pmatrix};$$

2) Найдем в начале $2B=\begin{pmatrix}4 & -8 & 2\\ 6 & 0 & 4\end{pmatrix}$, затем $A^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -4\\ -3 & 3\end{pmatrix}$

$2B-A^T=\begin{pmatrix}4 & -8 & 2\\ 6 & 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -4\\ -3 & 3\end{pmatrix}$ - решения нет, матрицы разного размера;

3) $AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$ - решения нет, число столбцов матрицы A не равно числу строк матрицы B ($3 \neq 2$).

Пример 2 Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. Проверить справедливость равенства AB ≠ BA.

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 3\cdot 1+(-1)\cdot 1\\ (-1)\cdot 1+2\cdot 3 & (-1)\cdot 1+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+1\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+1\cdot 2\\ 3\cdot 3+1\cdot(-1) & 3\cdot(-1)+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & 1\end{pmatrix}$$

Итак AB ≠ BA.

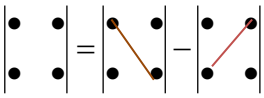
Задание 3. Найти произведение матриц AB, если $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+3\cdot2 & 1\cdot(-1)+3\cdot0 & 1\cdot3+3\cdot4\\ 0\cdot1+(-1)\cdot2 & 0\cdot(-1)+(-1)\cdot0 & 0\cdot3+(-1)\cdot4\\ (-1)\cdot1+2\cdot2 & (-1)\cdot(-1)+2\cdot0 & (-1)\cdot3+2\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -1 & 15\\ -2 & 0 & -4\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

2.2 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ВТОРОГО, ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

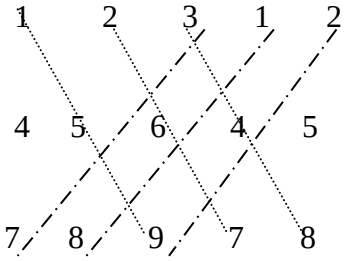
Пример 1. Вычислить определители 2-го порядка:



a) $\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 6\end{vmatrix}=3\cdot6-4\cdot(-2)=18+8=26$

b) $\begin{vmatrix}\sqrt{a} & -1\\ a & \sqrt{a}\end{vmatrix}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}-a\cdot(-1)=a+a=2a$

Пример 2. Вычислить определители 3-го порядка:



Элементы главной диагонали со знаком «+», Элементы побочной диагонали со знаком «-»

1. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=\begin{matrix}=(1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8)-(3\cdot5\cdot7+1\cdot6\cdot8+2\cdot4\cdot9)=\\ =(45+84+96)-(105+48+72)=225-225=0\end{matrix}$

2. $\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 5 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 5\end{matrix}=0+0+0-0-30+1=-29$

Пример 3. Решить уравнения $\begin{vmatrix}1 & 3 & x\\ 4 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=0$

Решение. Вычислим определитель в левой части уравнения.

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & x\\ 4 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 3\\ 4 & 5\\ 2 & -1\end{matrix}=25-6-4x-10x-1-60=-14x-42$$

Полученное выражение приравниваем к нулю:

$$-14x-42=0$$
$$-14x=42$$
$$x=-\frac{42}{14}=-3$$

2.3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. РАНГ МАТРИЦЫ

$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где A_{11}, A_{12}, …, A_{nn} есть алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы А.

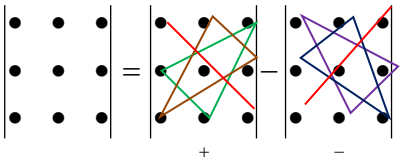
Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Вычисляют определитель данной матрицы.
2. Вычисляют алгебраические дополнения всех элементов данной матрицы и записывают новую матрицу.
3. Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонируют матрицу).
4. Умножают полученную матрицу на выражение $\frac{1}{\Delta}$, Записывают обратную матрицу.

Пример 1. Найти матрицу A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение.

1. Вычислим определитель матрицы А (по правилу треугольников):



$\Delta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=6+0+0-0-1-0=5$, так как определитель det=5≠0, то матрица А невырожденная и имеет обратную матрицу A^{-1}.

2. Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы А по формуле: $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$. Знаки алгебраического дополнения A_{ij}: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$A_{11}=+M_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5$ $\quad A_{13}=+M_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$ $\quad A_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-4$

$A_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=0$ $\quad A_{22}=+M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2$

$$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{31} = +M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

3. **Транспонируем полученную матрицу** $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

4. **Умножим матрицу на $\frac{1}{5}$, получим:** $A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Минором k-го порядка произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.

Рангом матрицы A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю. Обозначается r(A), rang(A).

Для следующей матрицы A ее ранг равен 1:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r(A) = 1.$$

Пример 2. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Решение. Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix}$$

Выполним: 2·II−I и результат запишем второй строкой, 2·III−I и результат запишем третьей строкой преобразованной матрицы.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прибавляя к третьей строке вторую умноженную на 3, мы получим нулевую строку.

Полученная ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит ее ранг равен 2. Следовательно, ранг исходной матрицы также равен 2.

2.4. Решение систем линейных алгебраических уравнений

1) Решить систему матричным способом: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$.

Решение. Пусть $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Тогда данную систему можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$. Отсюда получаем решение $X = A^{-1}B$. Найдем сначала A^{-1}.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3\underset{(-)}{(-1)^{2+1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)(0-(-2)) = -6.$$

($\Delta_A \neq 0$, значит $A^{-1}\ \exists$).

$$A_{11} = \underset{(+)}{(-1)^{1+1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

$$A_{21} = \underset{(-)}{(-1)^{2+1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-(-2)) = -2$$

$$A_{31} = \underset{(+)}{(-1)^{3+1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$A_{12} = \underset{(-)}{(-1)^{2+2}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\big(0-(-1)\big) = -1,$$

$$A_{22} = \underset{(+)}{(-1)^{1+2}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$A_{32} = \underset{(-)}{(-1)^{3+2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-2) = 3, \qquad A_{13} = \underset{(+)}{(-1)^{1+3}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-1 = -5,$$

$$A_{23} = \underset{(-)}{(-1)^{2+3}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+1) = 1 \qquad A_{33} = \underset{(+)}{(-1)^{3+3}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2 = 3$$

Составляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Найдем

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 2\cdot 1 + 0\cdot(+3) \\ 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-3)(-3) \\ 5\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + (-3)(-3) \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

т. е. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Проверка. Подставим найденное решение в исходную систему: $1-2+3=2$ (истина), $2\cdot 1+2-3=1$ (истина), $1-2\cdot 2=-3$ (истина).

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$.

2) **Решить систему методом Крамера.** Возьмем эту же систему и решим её с помощью определителей.

$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$, запишем определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6$ (найден выше).

Заменим в Δ столбец коэффициентов при x на столбец правых частей

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3\underset{(-)}{(-1)^{2+1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-)(0+2) = -6.$$

Заменим в Δ столбец коэффиц~~иентов при~~ y на столбец правых частей

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1\underset{(+)}{(-1)^{1+3}} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 3 = -12$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при z на столбец правых частей

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{2} \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = (-1)\underset{(-)}{(-1)^{1+2}} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 3 = -18.$$

По формулам Крамера получаем решение $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-6}{-6} = 1 \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-12}{-6} = 2 \\ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{-18}{-6} = 3 \end{cases}.$

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}.$

3) Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

Выписываем расширенную матрицу $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right)$ и с помощью элементарных преобразований приводим ее или к треугольному виду, или к виду трапеции (как получится).

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & -3\end{array}\right)\begin{matrix}(-2) & (-1)\\ & \\ & \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -3\\ 0 & -1 & -1 & -5\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -5\\ 0 & 3 & -3 & -3\end{array}\right)\begin{matrix} \\ (3)\\ \\ \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & -6 & -18\end{array}\right)\begin{matrix} \\ :(-1)\\ :(-6)\end{matrix} \Rightarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}x & y & z & \end{matrix}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)\end{array}. \ rA=3,\ rB=3 \Rightarrow r=3.$$

Так как число неизвестных $n=3$ и равно рангу системы, система имеет единственное решение. По полученной матрице восстанавливаем систему уравнений. Идя снизу вверх, получаем это решение: $\begin{cases} x-y+z=2\\ y+z=5\\ z=3\end{cases}$.

Из последнего уравнения $z=3$, с помощью второго находим $y=5-z=5-3=2.$ Подставляя в первое уравнение найденные $y=2$ и $z=3,$ находим $x=2+y-z=2+2-3=4-3=1.$

Ответ: $\begin{cases} x=1\\ y=2\\ z=3\end{cases}.$

4) Решить системы методом Гаусса: $\begin{cases} x-y+z=2\\ 2x+y-z=1\\ x+2y-2z=1\end{cases}$

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2 & 1\end{array}\right)\begin{matrix}(-2) & (-1)\\ & \\ & \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 3 & -3 & -1\end{array}\right)\begin{matrix} \\ (-1)\\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

$rA=2,\ rB=3.$ Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли система несовместна (т. е. не имеет решения). Выпишем уравнение, соответствующее последней строке полученной матрицы: $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=2$, что невозможно.

Ответ: система не имеет решения.

5) Решить системы методом Гаусса: $\begin{cases} 3x-2y+z=-1\\ -2x+y-2z=2\\ x-y-z=1\end{cases}$

Записываем расширенную матрицу:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c} (2)\quad(-3) \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : (-1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$rA = rB = 2$. Отсюда следует, что система совместна.

Число неизвестных $n = 3 > r = 2$. Следовательно, система имеет бесконечное множество решений: $n - r = 3 - 2 = 1$. Отсюда система имеет одну свободную переменную, пусть это будет z, тогда x, y – базисные (базисных неизвестных столько, каков ранг системы, т. е. сколько ненулевых строк остается в последней матрице).

Запишем систему, соответствующую полученной матрице: $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ y + 4z = -4 \\ z = z \end{cases}$.

Следовательно, идя снизу вверх, выражаем базисные неизвестные через свободную z. Из второго уравнения выражаем $y = -4 - 4z$, из первого уравнения

$$x = y + z + 1 = (-4 - 4z) + z + 1 = -4 - 4z + z + 1 = -3 - 3z.$$

Общее решение: $\begin{cases} x = -3 - 3z \\ y = -4 - 4z \\ z = z \end{cases}$.

Из общего решения можно получить любое частное решение. Пусть $z = -2$, тогда получим частное решение: $x = -3 - 3(-2) = -3 + 6 = 3$; $y = -4 - 4(-2) = -4 + 8 = 4$.

Частное решение: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x = -3 - 3z \\ y = -4 - 4z \\ z = z \end{cases}$.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

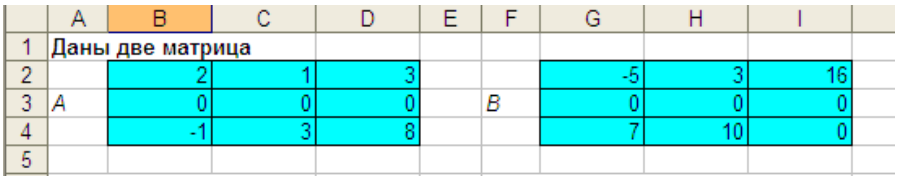
3.1. Решение задач линейной алгебры в программе MS Excel

Задание №1. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти: Сумму и произведение матриц.

Решение. Найти сумму матриц A+B:

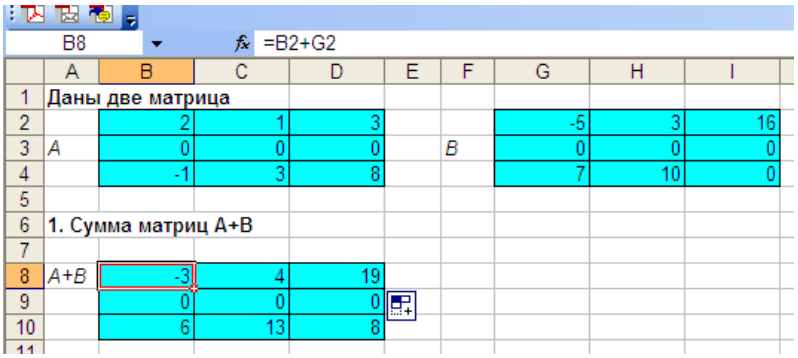
1) Заполнение ячеек матрицами A и B:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Даны две матрица								
2		2	1	3			-5	3	16
3	A	0	0	0		B	0	0	0
4		-1	3	8			7	10	0
5									

2) Вводим формулу в ячейку B8 «=B2+G2»;

3) Копирование формулы в ячейки B8:D10;

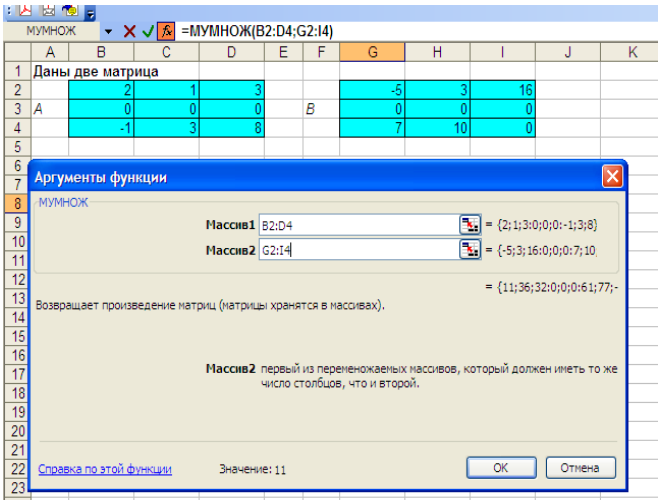


B8 =B2+G2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Даны две матрица								
2		2	1	3			-5	3	16
3	A	0	0	0		B	0	0	0
4		-1	3	8			7	10	0
5									
6	1. Сумма матриц A+B								
7									
8	A+B	-3	4	19					
9		0	0	0					
10		6	13	8					

Найти произведение матриц AB:

1) Введите формулу в ячейку G8 «=МУМНОЖ(B2:D4;G2:I4)» (возвращает произведение матриц).

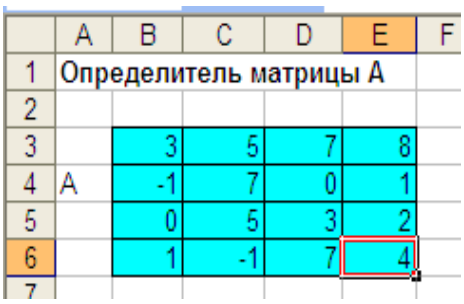


2) Выделите диапазон G8:I10, начиная с ячейки, содержащей формулу. Нажмите клавишу F2, а затем нажмите клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

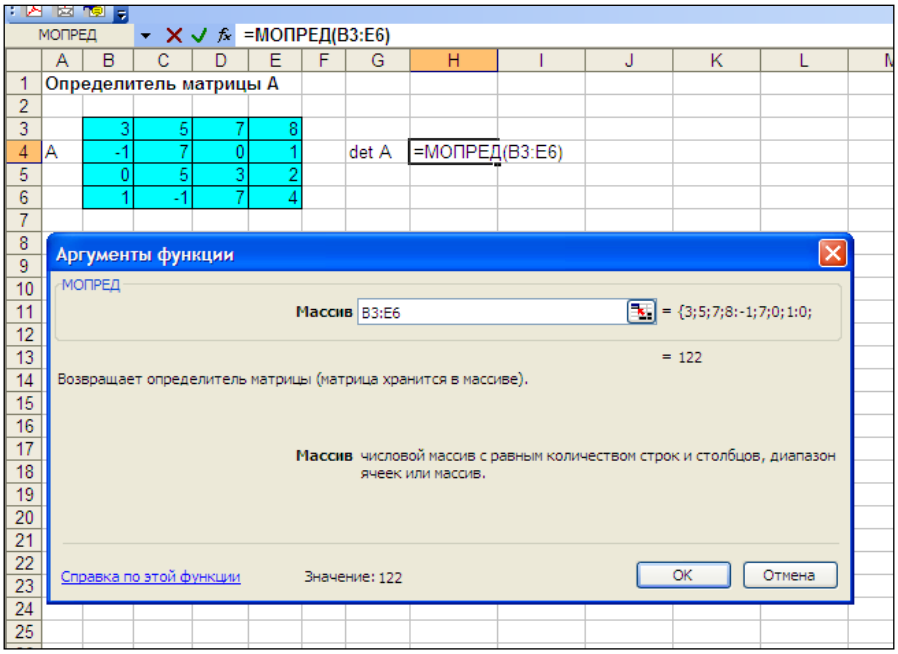
Задание №2. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Решение.

1) Введите в ячейки B3:E6 данные матрицы A:



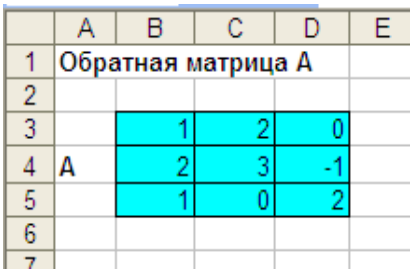
2) Введите в ячейку H4 формулу «=МОПРЕД(B3:E6)» (возвращает определитель матрицы).



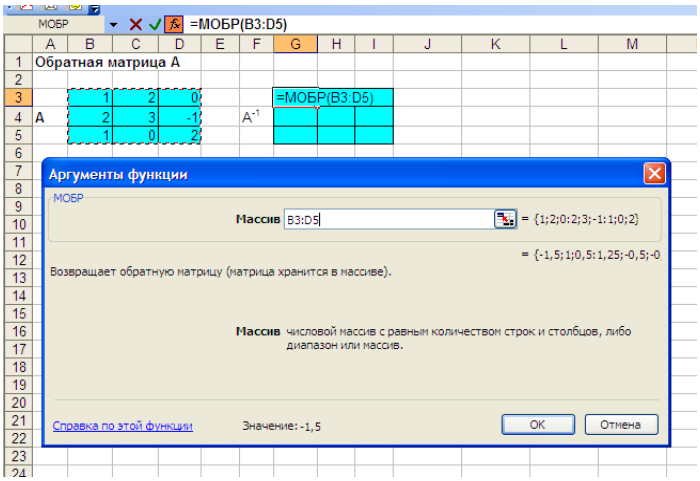
Задание №3. Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

Решение.

1) Введите в ячейки B3:D5 данные матрицы A:



2) Введите формулу в ячейку G3 «=МОБР(B3:D5)» (возвращает обратную матрицу).



3) Выделите диапазон G3:I5, начиная с ячейки, содержащей формулу. Нажмите клавишу F2, а затем нажмите клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

Задание №1. Даны матрицы А и В. Найдите $A+B,\ 2A,\ A-3B$, если:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix},\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ -1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

Задание №2. Вычислить:

1. $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\end{pmatrix}$

Задание №3. Дана матрица А, Найдите обратную A^{-1}, выполните проверку $\mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=\mathrm{E}$, если:

1. $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

Задание №6. Вычислить определитель матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.2. Решение задач линейной алгебры в среде MathCad

Проиллюстрируем возможности системы MathCad для выполнения операций над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц, транспонирование матрицы, нахождение обратной матрицы, вычисление определителя и ранга матрицы.

Настройка окна MathCad для работы с матрицами осуществляется следующим образом:

- ✓ На главной панели инструментов нажмите на кнопку с изображением матрицы (если главной панели инструментов нет на экране, то в опции View нужно выбрать Math);
- ✓ На главной панели инструментов нажмите на кнопку с изображением калькулятора.

Для ввода матрицы в рабочее поле и выполнения действий сделайте следующее:

- ✓ Нажмите на кнопку с символическим изображением матрицы на панели работы с матрицами;
- ✓ В появившемся окне укажите количество строк и столбцов матрицы и щелкните на кнопке OK;
- ✓ В появившийся в рабочем поле шаблон введите элементы матрицы.

Операции над матрицами выполняются также, как и действия с числами на калькуляторе: используя знаки «+» и «·», для сложения матриц, умножения матрицы на число и умножения матриц. Для вычисления ранга матрицы используется функция RANK(). Для получения простых дробей вместо знака «=», нужно использовать знак «→», набранный с клавиатуры с помощью комбинации клавиш Ctrl+ «·». Результаты выполнения матричных операций в среде MathCad показаны на рис 1.

В среде Mathcad решение систем линейных уравнений выполняется следующим образом:

- ✓ Введите с клавиатуры оператор Given;
- ✓ Введите заданную систему уравнений (знак равенства нужно вводить при помощи комбинации клавиш Ctrl+ «=»);
- ✓ Для решения системы воспользуйтесь оператором Find, после которого указываются переменные, подлежащие определению;
- ✓ Выберите на панели Evaluation кнопку символьных вычислений →;
- ✓ Щелкните на свободном поле.

Процесс вычисления показан на рис. 2

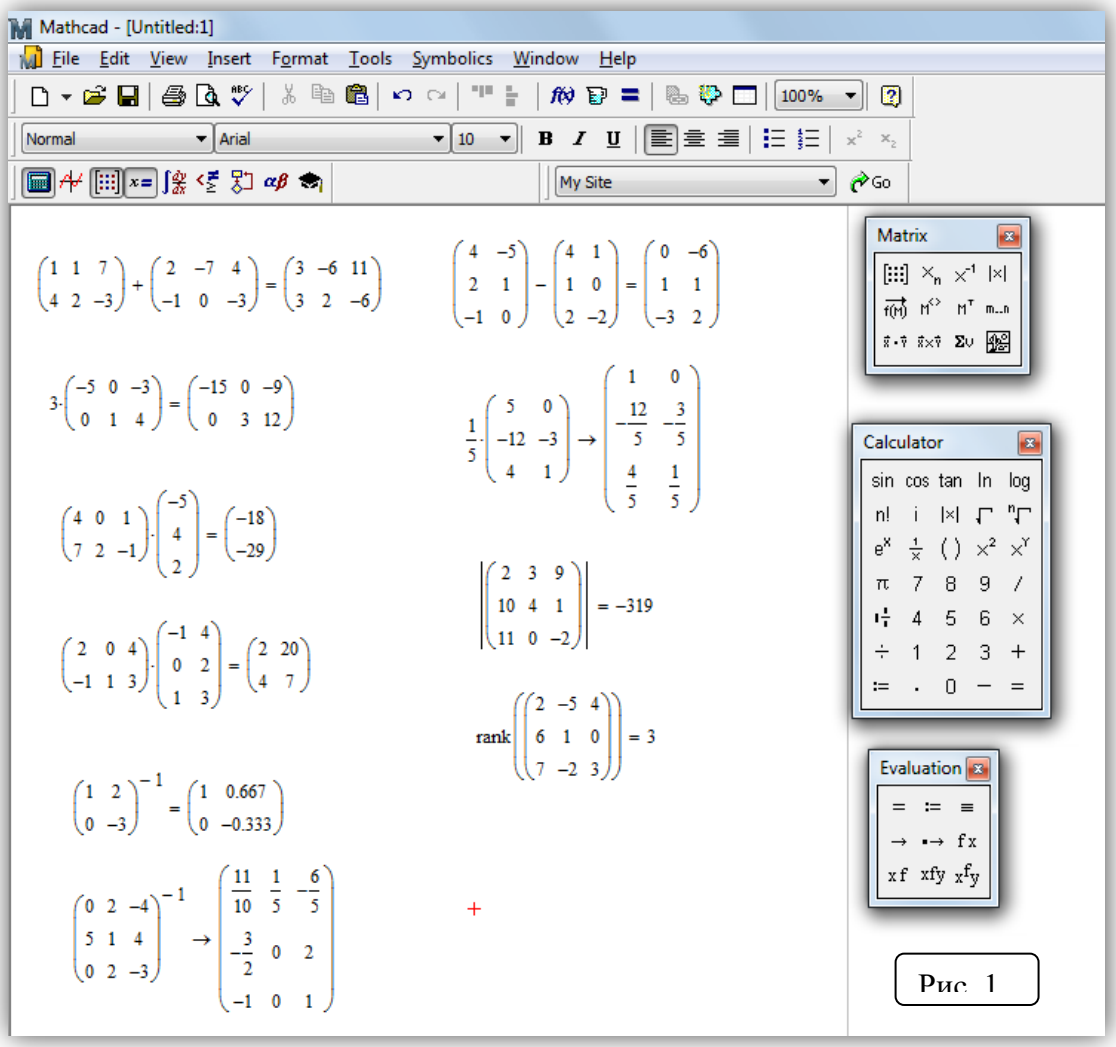

Mathcad - [Untitled:1]
File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help
Normal
Arial
10
My Site
Go
Matrix
Calculator
Evaluation

Рис. 1

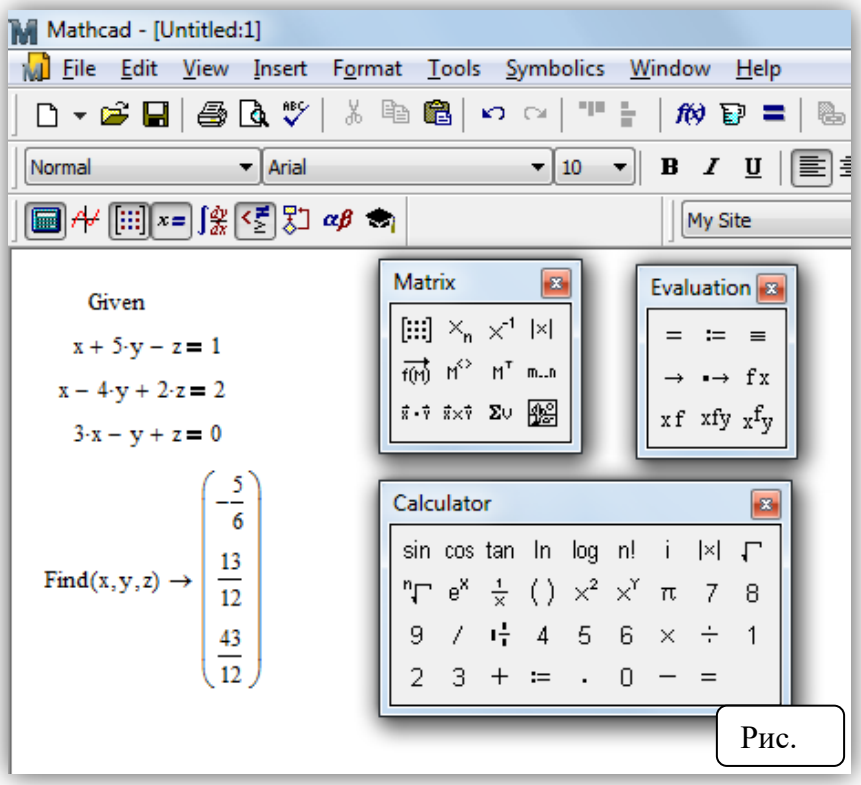

Mathcad - [Untitled:1]
File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help
Normal
Arial
10
My Site
Given
x + 5·y − z = 1
x − 4·y + 2·z = 2
3·x − y + z = 0
Find(x,y,z) →
Matrix
Evaluation
Calculator

Рис.

Задание №1. Даны матрицы A и B. Найдите $A+B,\ 2A,\ A-3B$, если:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix},\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ -1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

Задание №2. Вычислить:

1. $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\end{pmatrix}$

Задание №3. Найдите матрицу X из уравнения

$$4\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}+2X=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 10 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 10\end{pmatrix}$$

Задание №4. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Найдите: $AB, BX, B^TBX, AY, A^TAY, A^2-4A-9E, A^{-1}$.

Задание №5. Дана матрица A, Найдите обратную A^{-1}, выполните проверку $\mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=\mathrm{E}$, если:

1. $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

Задание №6. Вычислить определитель матрицы:

1. $\begin{pmatrix}7 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Задание №5. Вычислить ранг матрицы: $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 4 & -2 & 5 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 8\end{pmatrix}$

3.3.Решение систем линейных уравнений в программе Pascal

1. Метод Крамера.

```
program korni1;       {Метод Крамера для системы}
  label Out;        {уравнений с тремя неизвестными}
  var a:array[1..3,1..4] of integer;
  d1,d2,x,y,z,dx,dy,d,dz:real; i,j:integer;
begin
  for i:=1 to  3 do begin
    for j:=1 to 4 do read(a[i,j]); readln; end;
d1:=a[1,1]*a[2,2]*a[3,3]+a[1,2]*a[2,3]*a[3,1]+a[1,3]*a[2,1]*a[3,2];
d2:=a[3,1]*a[2,2]*a[1,3]+a[3,2]*a[2,3]*a[1,1]+a[3,3]*a[2,1]*a[1,2];
d:=d1-d2;
if d=0 then begin
            writeln('Единственого решения нет');
            goto Out;
          end;
d1:=a[1,4]*a[2,2]*a[3,3]+a[1,2]*a[2,3]*a[3,4]+a[1,3]*a[2,4]*a[3,2];
d2:=a[3,4]*a[2,2]*a[1,3]+a[3,2]*a[2,3]*a[1,4]+a[3,3]*a[2,4]*a[1,2];
dx:=d1-d2;
d1:=a[1,1]*a[2,4]*a[3,3]+a[1,4]*a[2,3]*a[3,1]+a[1,3]*a[2,1]*a[3,4];
d2:=a[3,1]*a[2,4]*a[1,3]+a[3,4]*a[2,3]*a[1,1]+a[3,3]*a[2,1]*a[1,4];
dy:=d1-d2;
d1:=a[1,1]*a[2,2]*a[3,4]+a[1,2]*a[2,4]*a[3,1]+a[1,4]*a[2,1]*a[3,2];
d2:=a[3,1]*a[2,2]*a[1,4]+a[3,2]*a[2,4]*a[1,1]+a[3,4]*a[2,1]*a[1,2];
dz:=d1-d2;
  x:=dx/d; y:=dy/d; z:=dz/d;
  writeln('x=',x);
  writeln('y=',y);
  writeln('z=',z);
Out: end.
```

2. Метод Гаусса.

```
program GAUS;            {Метод Гаусса для системы }{уравнений с тремя неизвестными}
  VAR A:array[1..3,1..3] of real;
    D,B,X:ARRAY[1..3] OF REAL;
    m,s:real;  i,j,k:integer;
begin
   for i:=1 to  3 do
     for j:=1 to 3 do read(a[i,j]);
   readln;
   for i:=1 to 3 do readln(b[i]);
   {Исключение неизвестных}
   for k:=1 to 2 do
     for i:=k+1 to 3 do
       begin
         m:=a[i,k]/a[k,k];
         for  j:=k+1 to 3 do
         a[i,j]:=a[i,j]-m*a[k,j];    b[i]:=b[i]-m*b[k];
       end;
   {Обратная подстановка}
   x[3]:=b[3]/a[3,3];
   for i:=2 downto 1 do
     begin
       s:=0;
       for j:=i+1 to 3 do s:=s+a[i,j]*x[j];
       x[i]:=(b[i]-s)/a[i,i];
     end;
   for i:=1 to 3 do
   writeln('x',i,'=',x[i]);
end.
```

4. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

4.1. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют матрицей? Как обозначается?
2. Что называется матрицей – строкой? Матрицей – столбцом?
3. Какие матрицы называются квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной и побочной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит «Транспонировать» матрицу?
10. Что называется суммой матриц?
11. Что называется произведением матрицы на число?
12. Как найти произведение двух матриц?
13. В чем состоит обязательное условие существование произведения матриц?
14. Какими свойствами обладает произведение матриц?
15. Что называется определителем матрицы?
16. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?
17. Что называется минором?
18. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
19. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
20. Какие способы вычисления определителя вам известны?
21. Перечислите свойства определителей.
22. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
23. Каков порядок вычисления обратной матрицы?
24. Что называется рангом матрицы?
25. Какая матрица называется невырожденной?
26. Перечислите свойства обратной матрицы.
27. Как записать простейшее матричное уравнение?
28. Как решить матричное уравнение?
29. Сформулируйте теорему Крамера.
30. Запишите формулы Крамера.
31. Опишите метод Гаусса.
32. В каком случае система не имеет решения?
33. В каком случае система имеет бесчисленное множество решения?

4.2 ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задания №1. Для матриц $A = \begin{pmatrix} k & m \\ l & n \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$. Найти:

1) Сумму матриц A+B;
2) Разность матриц A-B;
3) Произведение матриц AB и BA;
4) Транспонированные матрицы A, B;

Соответствующие коэффициенты выберите из таблицы:

Вариант	***k***	***l***	***m***	***n***	***p***	***q***	***r***	***s***
1	9	7	3	2	5	3	7	6
2	3	7	5	4	2	4	8	5
3	8	4	2	6	8	9	5	3
4	9	1	2	5	2	9	3	7
5	1	2	8	7	9	7	8	1
6	6	5	7	4	7	1	3	2
7	3	6	1	8	5	4	7	1
8	8	5	2	6	9	7	6	2
9	6	3	5	7	3	2	5	7
10	7	3	9	6	4	5	7	3

Задание №2. Даны две матрицы A и B. Проверить выполнимость равенства AB=BA в ручную и с использованием информационных технологий (Excel, Mathcad…).

Варианты	**Матрица A**	**Матрица B**
1	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

6	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Задания №3. Для матрицы A и B вычислить определители в ручную и с использованием информационных технологий (Excel, Mathcad…):

Варианты	**Матрица A**	**Матрица B**
1	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

8	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Задания №4. Найти обратную матрицу B^{-1} в ручную и с использованием информационных технологий (Excel, Mathcad…):

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Задание №5. Решить систему линейных уравнений: формулами Крамера, матричным методом, методом Гаусса вручную и с использованием информационных технологий (Excel, Pascal, Mathcad …): $\begin{cases} kx + ly + mz = n \\ px + qy + rz = s \\ tx + fy + gz = h \end{cases}$.

Соответствующие коэффициенты выберите из таблицы:

Вариант	**k**	**l**	**m**	**n**	**p**	**q**	**r**	**s**	**t**	**f**	**g**	**h**
1	1	1	1	0	2	1	0	4	1	-1	-2	5
2	1	1	-1	-4	2	3	1	-1	1	-1	2	6
3	2	1	1	3	5	-2	3	0	1	0	2	5
4	1	1	-1	0	2	3	-2	2	3	-2	0	1
5	1	1	1	4	2	1	3	9	3	3	-1	0
6	2	1	1	-3	3	1	-2	7	3	1	0	1
7	3	-1	-1	2	1	1	1	0	2	2	3	7
8	2	1	-1	3	3	2	2	-7	1	0	1	-2

9	1	1	1	6	2	-1	2	6	3	1	-1	2
10	1	1	2	3	2	-1	0	3	3	-1	0	1

4.3 КОМПЛЕКТ ЗАДАНИЙ В ТЕСТОВОЙ ОБОЛОЧКЕ «MyTestStudent»

ТЕСТ «МАТРИЦА. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ»

1. Вписать пропущенное слово.
_____ - множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов.

2. Дана матрица $C^{3\times 2} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -6{,}8 & 8 \\ 4{,}5 & 1 \end{pmatrix}$. Чему равен элемент c_{21}?

a. $c_{21} = 0$
b. $c_{21} = 8$
c. $c_{21} = -6{,}8$
d. $c_{21} = 4{,}5$

3. Задача: Из приведенных ответов выбрать матрицу.

Ответы: 1). $\begin{pmatrix} 1 & & 2 \\ & 0 & \\ 3 & & 5 \end{pmatrix}$ 2). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 3 & 5 \\ & & 6 \end{pmatrix}$ 3). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

4). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \\ & 5 & & 6 & 7 \end{pmatrix}$ 5). (5)

4. Вписать пропущенное слово.
Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется _____.

5. Вписать пропущенное слово.
Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется _____.

6. Определить единичную матрицу.

a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Для данной матрице $D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ найти транспонированную.

a. $D^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
b. $D^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
c. $D^T = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

d. $D^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

8. Какая из матриц является нулевой?

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. только A
b. A и C
c. только C
d. только B
e. любая из предложенных

9. Чему равен элемент b_{32} матрицы $B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a. 1
b. 4
c. 2
d. -1

10. Какая из матриц является единичной?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) только A
b) только C
c) A и C
d) только B

11. Закончить утверждение. Матрицу вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$ называют матрицей… – столбцом

a. –строкой
b. порядка 1
c. размерности 1x0
d. все предложенные ответы неверны

12. Задача: Запись (2x4) размерности матрицы означает:

a. матрица имеет 4 строки и 2 столбца
b. матрица имеет 8 строк
c. матрица имеет 2 строки и 4 столбца
d. на главной диагонали матрицы стоят 8 элементов
e. все предложенные ответы неверны

13. Что означает данная запись $B^{2\times4}$?.

a. Размер матрицы, у которой 2 строки и 4 столбца.
b. Размер матрица, у которой 2 столбца и 4 строки.
c. Объем матрицы, которая 2 см в длину, 4 см в ширину и 8 см в высоту.
d. Ни чего.

14. Задача: Выбрать матрицу размерности (3×2)

Ответы: 1). $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 2). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3). $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

4). $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$ 5). все предложенные ответы неверны

15. Задача: Выбрать матрицу треугольного вида

Ответы: 1). $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 2). $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

4). $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 5). все предложенные ответы неверны

16. Чему равен элемент b_{23} матрицы $B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a. 2
b. 1
c. 0
d. 3

17. Вставить пропущенное. Матрицы называются равными, если они…

a. одинаковой размерности и их соответствующие элементы равны
b. одинаковой размерности
c. имеют одинаковое число строк
d. имеют одинаковое число столбцов
e. предложенные ответы неверны

18. Чему равен элемент b_{13} матрицы $B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a. 3
b. 4
c. -1
d. 5

19. Чему равна транспонированная матрица $B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a. $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
d. решений нет

20. Вставить пропущенное. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется…

a. Прямоугольной
b. Трапециевидной
c. Квадратной
d. Столбцовой
e. все предложенные ответы неверны

21. Чему равен элемент $в_{23}$ матрицы $B=\begin{pmatrix} -9 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a. 0
b. 1
c. 2
d. -1

22. Вставить пропущенное. Замена строк матрицы соответствующими столбцами называется…

a. вычитанием матриц
b. умножением матрицы на число
c. сложением матриц
d. транспонированием матрицы
e. все предложенные ответы неверны

23. Вставить пропущенное. … матрица – это матрица вида $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ где $a, b, c \neq 0; a, b, c \neq 1$.

a. Нулевая
b. Единичная
c. Диагональная
d. Вырожденная
e. все предложенные ответы неверны

24. Найти единичную матрицу

Ответы: 1). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2). $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4). $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 5). $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

25. Вставить пропущенное. Нулевая матрица – это…

a. квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят нули
b. матрица, все элементы которой равны нулю
c. любая матрица, имеющая хотя бы один нулевой столбец
d. любая матрица, имеющая хоты бы одну нулевую строку
e. все предложенные ответы неверны

26. Вставить пропущенное. Сложить можно матрицы…

a) имеющие только одинаковое число строк
b) имеющие только равное число столбцов
c) любые
d) одинаковой размерности
e) все предложенные ответы неверны

27. Вставить пропущенное. Умножить можно матрицы…

a) одинаковой размерности

a. у которых равное число строк
b. у которых равное число столбцов
c. у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы
d. любые

28. Вставить пропущенное. Чтобы умножить матрицу на число необходимо умножить на это число…
a. все элементы матрицы
b. элементы какой-либо строки
c. элементы какого-либо столбца
d. элементы главной диагонали
e. элементы побочной диагонали

29. Закончить утверждение. Матрица, получаемая при сложении матрицы А с нулевой матрицей, равна .
a. самой матрице А
b. нулевой
c. вырожденной
d. обратной
e. все предложенные ответы неверны

30. Закончить утверждение. Матрица, получаемая при сложении матрицы А с нулевой матрицей, равна .
a. самой матрице А
b. нулевой
c. вырожденной
d. обратной
e. все предложенные ответы неверны

31. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ Противоположная матрица равна:
a. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

32. Найти сумму матриц $A=\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ *и* $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
a. $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

33. Найти разность матриц $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

a. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

34. Чему равно выражение $3A + B$, если даны матрицы
$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

a. $\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -12 & 3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$

35. Чему равно произведение двух матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 3 & -8 & 12 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

c. решений нет

d. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -3 & -4 & 12 \end{pmatrix}$

Определитель. Миноры и алгебраические дополнения

Задание #1

Вопрос: Вставить пропущенное. Определителем матрицы

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

называется число, равное…

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) все предложенные ответы неверны
2) ad +bc
3) ad −bc
4) bc − ad
5) abcd

Задание #2

Вопрос: Выбери верную формулу разложения определителя третьего порядка по второй строке ...

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) $\Delta = a_{12}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{23}$
2) $\Delta = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$
3) $\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$
4) нет правильного ответа
5) $\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}$

Задание #3

Вопрос: Вычислить минор M_{21} определителя матрицы

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) Нет правильного ответа
2) 2
3) -1
4) 4
5) 3

Задание #4

Вопрос: Вычислить определитель второго порядка:

$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) -13
2) -14

3) -12
4) -11
5) все предложенные ответы неверны

Задание #5

Вопрос: Вычислить алгебраическое дополнение A_{23} определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) Нет правильного ответа
2) 2
3) 3
4) -2
5) -3

Задание #6

Вопрос: Закончить утверждение. Если к элементам какой-либо его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель…

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) умножится на это число.
2) не изменится
3) все предложенные ответы неверны
4) умножится на любое число
5) все предложенные ответы верны

Задание #7

Вопрос: Вычислить алгебраическое дополнение A_{11} определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) -1
2) -4
3) 2
4) Нет правильного ответа
5) 3

Задание #8

Вопрос: Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) все предложенные ответы неверны
2) 0
3) -1
4) 2
5) 1

Задание #9

Вопрос: Вставить пропущенное. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя матрицы А называется…

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) определитель, полученный вычеркиванием i − ой строки и j −го столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$
2) матрица, полученная из исходной вычеркиванием i −ой строки и j− го столбца
3) определитель, полученный вычеркиванием i− ой строки и j− го столбца
4) матрица, полученная из исходной вычеркиванием i − го столбца и j − ой строки
5) определитель, полученный вычеркиванием i− го столбца и j −ой строки

Задание #10

Вопрос: Вычислить минор M_{11} определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) 2
2) Нет правильного ответа
3) 3
4) 1
5) -4

Задание #11

Вопрос: Закончить утверждение. Определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

равен ...

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) $a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}-a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}-a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}$
2) $a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}+a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}+a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}$
3) $a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}$
4) $a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}-a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}+a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}$
5) Нет правильного ответа

Задание #12

Вопрос: Вычислить алгебраическое дополнение A_{21} определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) Нет правильного ответа
2) 4
3) -2
4) 3
5) 2

Задание #13

Вопрос: Закончить утверждение. Если строки определителя поменять местами с соответствующими столбцами, то определитель…

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) все предложенные ответы неверны
2) умножится на 2
3) нет правильного ответа
4) разделится на 2
5) не изменится

Задание #14

Вопрос: Вычислить минор M_{22} определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) Нет правильного ответа
2) 8
3) 2
4) 4
5) 3

Задание #15

Вопрос: Закончить утверждение. Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя умножить на одно и то же число, то определитель …

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) все предложенные ответы неверны
2) все предложенные ответы верны
3) умножится на любое число
4) не изменится
5) умножится на это число.

Задание #16

Вопрос: Вычислить $|A \cdot B|$, если

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) 2
2) Нет правильного ответа
3) 4
4) 1
5) 5

Задание #17

Вопрос: Закончить утверждение. Определитель, у которого элементы двух его строк (столбцов) пропорциональны, равен …

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) 1
2) все предложенные ответы неверны
3) 0
4) -1
5) все предложенные ответы верны

Задание #18
Вопрос: Дано
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$
Найти алгебраическое дополнение A_{12} определителя матрицы A.

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$
2) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
3) $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
4) $-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$
5) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Задание #19
Вопрос: Закончить утверждение. При перестановке местами двух строк (столбцов) знак определителя…

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) не меняется
2) всегда отрицателен
3) все предложенные ответы неверны
4) нет правильного ответа
5) меняется на противоположный

Задание #20
Вопрос: Дано:
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$$
Найти определитель матрицы A.

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) $k^2 \cdot (a \cdot d - b \cdot c)$
2) 0
3) $k \cdot (a \cdot d - b \cdot c)$

4) $-(a \cdot d - b \cdot c)$
5) $a \cdot d - b \cdot c$

Задание #21
Вопрос: Вставить пропущенное. Минором k-го порядка определителя квадратной матрицы А называется…

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) нет правильного ответа
2) матрица, составленная из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов
3) определитель матрицы А
4) определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов
5) матрица А k-го порядка

Тест «Обратная матрица. Ранг матрицы»

Задание #1
Вопрос: Выяснить, какие из приведенных ниже матриц имеют обратные:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) B
2) A
3) D
4) C
5) все предложенные ответы неверны

Задание #2
Вопрос: Согласны ли Вы с утверждением.

Обратная матрица для матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ вычисляется по формуле $\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

Выберите один из 2 вариантов ответа:
1) Нет
2) Да

Задание #3
Вопрос: Вставить пропущенное. Рангом матрицы А называется…

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) наибольший из порядков ее миноров, которые не равны нулю
2) количество строк матрицы
3) нет правильного ответа
4) порядок любого ее минора
5) количество столбцов матрицы

Задание #4
Вопрос: Закончить утверждение. Для того, чтобы существовала A^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы матрица А была…

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) квадратной
2) невырожденной
3) нет правильного ответа
4) ненулевой
5) диагональной

Задание #5
Вопрос: Вставить пропущенное. Произведение AA^{-1} равно …. матрице.

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) треугольной
2) нулевой
3) нет правильного ответа
4) обратной
5) единичной

Задание #6
Вопрос: Согласны ли Вы с утверждением.
Обратная матрица для матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ вычисляется по формуле $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$

Выберите один из 2 вариантов ответа:
1) Нет
2) Да

Задание #7
Вопрос: Закончить утверждение. Для любой невырожденной матрицы существует…

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) две обратные матрицы, транспонированные друг к другу
2) единственная обратная матрица
3) бесконечно много обратных матриц
4)
5) три обратные матрицы

Задание #8
Вопрос: Найти обратную матрицу для данной
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) нет правильного ответа

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Задание #9</u>

Вопрос: Согласны ли Вы с утверждением.

Обратная матрица для матрицы третьего порядка вычисляется по формуле

$$\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Выберите один из 2 вариантов ответа:

1) Да

2) Нет

<u>Задание #10</u>

Вопрос: Согласны ли Вы с утверждением.

Обратная матрица для матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ вычисляется по формуле

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Выберите один из 2 вариантов ответа:

1) Нет

2) Да

<u>Задание #11</u>

Вопрос: Выберите решение для матричного уравнения AX =B.

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) $X = B\ A^{-1}$

2) $X = B^{-1}A$

3) $X = A^{-1}B$

4) $X = AB^{-1}$

5) нет правильного решения

<u>Задание #12</u>

Вопрос: Вставить пропущенное. Квадратная матрица имеет обратную тогда и только тогда, когда ее ... не равен нулю

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) порядок

2) определитель

3) ранг

4) нет правильного ответа

5) размер

Задание #13
Вопрос: Вычислить ранг матрицы
$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) 2
2) 1
3) нет правильного ответа
4) 4
5) 3

Задание #14
Вопрос: Найти обратную матрицу для данной
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
2) нет правильного ответа
3) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
4) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
5) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Задание #15
Вопрос: Какая матрица не имеет обратной матрицы?

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) неквадратная
2) нулевая
3) все предложенные ответы неверны
4) все предложенные ответы верны
5) вырожденная

Задание #16
Вопрос: Закончить утверждение. Произведение матрицы А на обратную к ней матрицу равно…

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) 1
2) А
3) Е
4) 0
5) нет правильного ответа

Задание #17
Вопрос: Согласны ли Вы с утверждением.
Может ли ранг матрицы быть отрицательным?

Выберите один из 2 вариантов ответа:
1) Да
2) Нет

Задание #18
Вопрос: Согласны ли Вы с утверждением.
Обратная матрица для матрицы третьего порядка вычисляется по формуле

$$\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Выберите один из 2 вариантов ответа:
1) Нет
2) Да

ТЕСТ «СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Задание #1
Вопрос: Вставить пропущенное. Система линейных уравнений называется неопределенной, если она имеет…

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) пустое множество решений
2) множество различных решений
3) одно решение
4) нет правильного ответа
5) два решения

Задание #2
Вопрос: Вставить пропущенное. Система линейных уравнений называется ..., если она имеет единственное решение.

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) определенной
2) совместной
3) нет правильного ответа
4) несовместной
5) неопределенной

Задание #3
Вопрос: Вставить пропущенное. Система линейных уравнений называется ..., если она не имеет решений.

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) неопределенной
2) несовместной
3) совместной

4) определенной
5) нет правильного ответа

Задание #4
Вопрос: Какой определитель называется главным определителем системы?

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) определитель, составленный из свободных членов
2) ΔX_i
3) нет правильного ответа
4) определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы
5) все предложенные ответы верны

Задание #5
Вопрос: Вставить пропущенное. Система линейных уравнений называется определенной, если она имеет…

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) единственное решение
2) множество решений
3) пустое множество решений
4) нет правильного ответа
5) ровно два решения

Задание #6
Вопрос: Вставить пропущенное. Основная матрица системы линейных уравнений - это матрица…

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) состоящая из коэффициентов при неизвестных и свободных членов
2) состоящая из коэффициентов при неизвестных
3) единичная
4) состоящая из свободных членов системы
5) нет правильного ответа

Задание #7
Вопрос: Если для системы линейных уравнений известно:
$\Delta = 2, \Delta_1 = 6, \ \Delta_2 = -4, \ \Delta_3 = 8,$ то $x_3 = ...$

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) 2
2) 1
3) нет правильного ответа
4) 7
5) 4

Задание #8
Вопрос: Вставить пропущенное. Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы ... решение.

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) два решения

2) одно решение
3) нет правильного ответа
4) пустое множество решений
5) множество решений

Задание #9
Вопрос: Закончить утверждение. Если главный определитель системы $\neq 0$, то система…

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) имеет единственное решение
2) имеет бесконечно много решений
3) нет правильного ответа
4) все предложенные ответы верны
5) не имеет решений

Задание #10
Вопрос: Если для системы линейных уравнений известно:
$\Delta = 2, \Delta_1 = 6, \ \Delta_2 = -4, \ \Delta_3 = 8$, то $x_2 = ...$

Выберите один из 5 вариантов ответа:
1) нет правильного ответа
2) -2
3) 4
4) 7
5) 2

Задание #11
Задача: Вставить пропущенное. Если в результате элементарных преобразований расширенной матрицы системы получилась матрица $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$, то эта система…
Ответы: 1). совместная 2). несовместная 3). неопределенная
4). определенная 5). нет правильного ответа

Задание #12
Задача: Вставить пропущенное. Если в результате элементарных преобразований расширенной матрицы системы получилась матрица $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, то эта система…
Ответы: 1). совместная 2). несовместная 3). неопределенная
4). определенная 5). нет правильного ответа

4.4. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАНИЕ 1. Вычислить определители:

1.	а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.
2.	а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.
3.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.
4.	а) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.
5.	а) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.
6.	а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$.
7.	а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$.

8.	а) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.
9.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.
10.	а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.
11.	а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.
12.	а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$.
13.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.
14.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.
15.	а) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

16.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & -2 \\ 1 & -3 & -7 & 6 \end{vmatrix}$.
17.	а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.
18.	а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.
19.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.
20.	а) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.
21.	а) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.
22.	а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$.
23.	а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$.

24.	а) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.
25.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.
26.	а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.
27.	а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.
28.	а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$.
29.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.
30.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 2. Умножить матрицы:

1.	а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.
2.	а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
3.	а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;
4.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
5.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
7.	а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.
8.	а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
9.	а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
10.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

11.	а) $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&2\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&2\\0&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$.
12.	а) $\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&5\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}1&-2&-1\\3&1&2\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2&-3\\-4&3&-5\\5&-4&7\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&2&1\\1&2&3\end{pmatrix}$.
13.	а) $\begin{pmatrix}-1&0\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\7&1\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&-1&2\\3&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&2\\3&2&1\\1&3&5\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&3&0\end{pmatrix}$.
14.	а) $\begin{pmatrix}-2&0\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\3&1\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}1&3&2\\-3&2&0\\4&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&3\\0&1&4\\-1&1&0\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\1&7\end{pmatrix}$.
15.	а) $\begin{pmatrix}2&7\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&0\\3&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&0&1\\3&2&7\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\1&5\end{pmatrix}$.
16.	а) $\begin{pmatrix}2&-3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&2&3\\4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&5\\0&1&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1&1&5\\3&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\1&2\end{pmatrix}$.
17.	а) $\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$.
18.	а) $\begin{pmatrix}2&-3\\4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&-6\\6&-4\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}5&8&-4\\6&9&-5\\4&7&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&5\\4&-1&3\\9&6&5\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\\1&3\end{pmatrix}$.
19.	а) $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\3&-5\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1&4&3\\5&-1&-1\\3&6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&5\\1&4&-1\\3&-5&2\end{pmatrix}$.	б) $\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&3&5\end{pmatrix}$;
20.	а) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&-1&2\\3&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&2\\3&2&1\\1&3&5\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-2&-1\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\5&1\\2&-3\end{pmatrix}$.

21.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
22.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
23.	а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.
24.	а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
25.	а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
26.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.
27.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
28.	а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
29.	а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
30.	а) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 3. Найти обратные матрицы для матриц:

1.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.	**2.**	а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
3.	а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.	**4.**	а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
5.	а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.	**6.**	а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
7.	а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.	**8.**	а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
9.	а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.	**10.**	а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
11.	а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.	**12.**	а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
13.	а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.	**14.**	а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
15.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.	**16.**	а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.
17.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.	**18.**	а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
19.	а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.	**20.**	а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

21.	а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.	**22.**	а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
23.	а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.	**24.**	а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
25.	а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.	**26.**	а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
27.	а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.	**28.**	а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
29.	а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.	**30.**	а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 4. Найти ранг матрицы двумя способами:

1.	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.	**2.**	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.	**3.**	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.
4.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.	**5.**	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.	**6.**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$.
7.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.	**8.**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.	**9.**	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.
10.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.	**11.**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.	**12.**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.	**14.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.	**15.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.		
17. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.	**18.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.	**19.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.
20. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.	**21.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.	**22.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$.
23. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.	**24.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.	**25.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.
26. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.	**27.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.	**28.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.
29. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.	**30.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.	

ЗАДАНИЕ 5. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

1.	а) $\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$.
2.	а) $\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$.

3.	а) $\begin{cases} 2x+2y-3z=-4 \\ x+2y+z=5 \\ 3x+z=-1 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+3y-z=-2 \\ 2x+2y-z=1 \\ 2x+3y+3z=4 \end{cases}$.
4.	а) $\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ x+3y-z=7 \\ 3x-y-4z=12 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ x-y-z=-1 \\ x+3y-z=3 \end{cases}$.
5.	а) $\begin{cases} x+3y+3z=11 \\ x-2y+3z=1 \\ 3x+3y-z=1 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x-2z=11 \\ 2x-2y+3z=3 \\ x-y+4z=-1 \end{cases}$.
6.	а) $\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 4x+2y+5z=5 \\ 3x+4y+7z=2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 2x+6y+z=2 \\ 4x+8y-z=2 \end{cases}$.
7.	а) $\begin{cases} 2x+4y+z=4 \\ 3x+6y+2z=4 \\ 4x-y-3z=1 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 4x+y+4z=9 \\ 3x+5y+2z=10 \end{cases}$.
8.	а) $\begin{cases} 3x-3y+2z=2 \\ 4x-5y+2z=1 \\ 5x-6y+4z=3 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x+2y-4z=8 \\ 2x+4y-5z=11 \\ 4x-3y+2z=1 \end{cases}$.
9.	а) $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$.
10.	а) $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$.
11.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \\ 2x-5y+4z=4 \end{cases}$.

12.	а) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5; \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \end{cases}$.
13.	а) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1; \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x+y+2z=6 \\ 3x-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.
14.	а) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3; \\ x-y+2z=5 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x+3y-z=-3 \\ 4x+y+3z=9 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.
15.	а) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2; \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x-4y+z=3 \\ x-5y+3z=-1. \\ x-y+z=1 \end{cases}$
16.	а) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=3; \\ x-y+2z=5 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 5x+y+3z=14. \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$
17.	а) $\begin{cases} x-2y-z=-5 \\ x+2y-2z=2 \\ 3x+y-4z=-2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x-2y+z=-2 \\ x+2y+2z=1. \\ 3x+y+4z=0 \end{cases}$
18.	а) $\begin{cases} 2x+y-z=7 \\ 2x-2y+3z=3; \\ x-y-z=4 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x-2y+3z=6 \\ 3x-2y+4z=7. \\ 3x+2y-3z=4 \end{cases}$
19.	а) $\begin{cases} 2x+2y-3z=-4 \\ x+2y+z=5 \\ 3x+z=-1 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+3y-z=-2 \\ 2x+2y-z=1 \\ 2x+3y+3z=4 \end{cases}$.
20.	а) $\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ x+3y-z=7 \\ 3x-y-4z=12 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ x-y-z=-1. \\ x+3y-z=3 \end{cases}$

21.	а) $\begin{cases} x+3y+3z=11 \\ x-2y+3z=1 \\ 3x+3y-z=1 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x-2z=11 \\ 2x-2y+3z=3 \\ x-y+4z=-1 \end{cases}$.
22.	а) $\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 4x+2y+5z=5 \\ 3x+4y+7z=2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 2x+6y+z=2 \\ 4x+8y-z=2 \end{cases}$.
23.	а) $\begin{cases} 2x+4y+z=4 \\ 3x+6y+2z=4 \\ 4x-y-3z=1 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 4x+y+4z=9 \\ 3x+5y+2z=10 \end{cases}$.
24.	а) $\begin{cases} 3x-3y+2z=2 \\ 4x-5y+2z=1 \\ 5x-6y+4z=3 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x+2y-4z=8 \\ 2x+4y-5z=11 \\ 4x-3y+2z=1 \end{cases}$.
25.	а) $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$.
26.	а) $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$.
27.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \\ 2x-5y+4z=4 \end{cases}$.
28.	а) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \end{cases}$.
29.	а) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x+y+2z=6 \\ 3x-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.

30.	а) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3; \\ x-y+2z=5 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x+3y-z=-3 \\ 4x+y+3z=9 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.

Задание 6. Решить системы методом Гаусса:

1.	а) $\begin{cases} x+y-z=3 \\ x+y+z=1; \\ x+y=2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ -x+4y+z=3 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$;
2.	а) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x-3y+5z+7t=1 \\ 4x-6y+2z+3t=2 \\ 2x-3y-11z-15t=1 \end{cases}$;
3.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2; \\ 3x+6y+9z=3 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ 5x+y-z=7 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}$.
5.	а) $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+3y-z=3; \\ 4x-y+z=11 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \\ 3x+4y+3z=0 \end{cases}$;
6.	а) $\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3; \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$
7.	а) $\begin{cases} x+2y-6z=5 \\ 2x-y+3z=-7 \\ 5x+5y-15z=8 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$;

8.	а) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 11x+17y+6z-39u=1 \\ 2x-3y-5z-u=0 \\ x+32y+31z-34u=1 \end{cases}$;
9.	а) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+3y-z=1 \\ 3x+4y-z=5 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ x-2y+z-t=-1; \\ x-2y+z+5t=5 \end{cases}$
10.	а) $\begin{cases} 2x-y+3z=-7 \\ x+2y-6z=-1 \\ -x+5y-15z=8 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}$;
11.	а) $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 3x+2y-4z=2; \\ 5x-2y+2z=4 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$;
12.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ 2x-y+5z=12 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x-7y+6z=4 \\ x+12y-11z=-7 \\ 3x-2y+z=1 \\ 8x+y-3z=-1 \end{cases}$;
13.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3; \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$
14.	а) $\begin{cases} 3x+2y+z=-1 \\ 7x+6y+5z=5; \\ 5x+4y+3z=2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x-3y+5z+7t=1 \\ 4x-6y+2z+3t=2 \\ 2x-3y-11z-15t=1 \end{cases}$;
15.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ 2x-y+5z=12 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+3z-t=1 \\ 3x+2y+z-t=1; \\ 5x+5y+2z=2 \end{cases}$

16.	а) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+3y-z=1 \\ 3x+4y-z=5 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}$;
17.	а) $\begin{cases} x+y-z=3 \\ x+y+z=1 \\ x+y=2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ -x+4y+z=3 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$;
18.	а) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x-3y+5z+7t=1 \\ 4x-6y+2z+3t=2 \\ 2x-3y-11z-15t=1 \end{cases}$;
19.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3x+6y+9z=3 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$;
20.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{cases}$;
21.	а) $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+3y-z=3 \\ 4x-y+z=11 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \\ 3x+4y+3z=0 \end{cases}$;
22.	а) $\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$;
23.	а) $\begin{cases} x+2y-6z=5 \\ 2x-y+3z=-7 \\ 5x+5y-15z=8 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$;

24.	а) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 11x+17y+6z-39u=1 \\ 2x-3y-5z-u=0 \\ x+32y+31z-34u=1 \end{cases}$;
25.	а) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+3y-z=1 \\ 3x+4y-z=5 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ x-2y+z-t=-1; \\ x-2y+z+5t=5 \end{cases}$
26.	а) $\begin{cases} 2x-y+3z=-7 \\ x+2y-6z=-1 \\ -x+5y-15z=8 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}$;
27.	а) $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 3x+2y-4z=2; \\ 5x-2y+2z=4 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$;
28.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ 2x-y+5z=12 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x-7y+6z=4 \\ x+12y-11z=-7 \\ 3x-2y+z=1 \\ 8x+y-3z=-1 \end{cases}$;
29.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3; \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$
30.	а) $\begin{cases} 3x+2y+z=-1 \\ 7x+6y+5z=5; \\ 5x+4y+3z=2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x-3y+5z+7t=1 \\ 4x-6y+2z+3t=2 \\ 2x-3y-11z-15t=1 \end{cases}$;

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьева О.Н., Бродский Я.С. и др. Сборник задач по математике для техникумов. Учебн. Пособие. – М.: Наука, 1987.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. -М., Высшая школа, 1998. – 320 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. - М., Наука, 1997. – 288 с.
4. В. Т. Лисичкин, И. Л. Соловейчик. Математика. Учеб.пособие для техникумов.-М.: Высш.школа. 1991. – 480 с.: ил
5. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы. Учебн. Пособие. – М.: Наука, 1990.
6. Виноградов И.М. Элементы высшей математики. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел: Учебник для вузов-М.:Высш. шк., 1999. – 511с.
7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для ВУЗОВ/ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая школа, 2000.
8. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: Учебное пособие для ВУЗОВ/Под ред. Н.В. Ефимова – 1-е изд., испр. – М.:Наука, 2002. – 224 с.
9. Лниьков В. М., Яренко Н. Н. Высшая математика в примерах и задачах. Компьютерный практикум: Учебное пособие – М.: Финансы и статистика, 2006.-320с
10. Н. В. Богомолов Практические занятия по математике: Учеб.пособие для втузов. – 4–е изд., стер. – М.: Высш.шк.,1997. – 495с.
11. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч.1. – М.. Айрис - Пресс, 2004. – 608 с.
12. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа (под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича). - М.: Наука, 2003. – 478 с.
13. Учебно-методический комплекс дисциплины « Математика». Раздел 1 «Линейная и векторная алгебра». Контрольно-измерительные материалы. – Уфа: Издательство УГНТУ, 2007. – 175 с.
14. Учебно-методический комплекс дисциплины « Математика». Раздел 1 «Линейная и векторная алгебра». Теоретические основы. Методические указания для студентов. Материалы для самостоятельной работы студентов. – Уфа: Издательство УГНТУ, 2007. – 118 с.
15. Шипачев В.С. Курс высшей математики. – М.: Изд-во МГУ, 2001.